II.10 Ecritures canoniques d'une fonction logique

II.10.a Somme canonique de produits

Considérons trois variables booléennes x, y et z. A partir de ces trois variables nous pouvons construire huit produits logiques (ou minterms) $P_{i=0,7}$ faisant intervenir x ou $\bar{x}$, y ou $\bar{y}$ et z ou $\bar{z}$. Pour chacune des huit combinaisons $C_{i=0,7}$ (000, 001, 010, etc…) des variables x, y et z, nous pouvons calculer les valeurs de ces produits. Celles-ci sont rassemblées dans la table 10. Chacun de ces produits ne prend la valeur 1 que pour une et une seule combinaison : P_i vaut 1 uniquement pour la combinaison C_i.

				P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
C_i	x	y	z	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$	$\bar{x}\,\bar{y}\,z$	$\bar{x}\,y\,\bar{z}$	$\bar{x}\,y\,z$	$x\,\bar{y}\,\bar{z}$	$x\,\bar{y}\,z$	$x\,y\,\bar{z}$	$x\,y\,z$
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
7	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

Table 10

Pour toute fonction logique de trois variables x, y et z, nous pouvons écrire sa table de vérité, c'est-à-dire expliciter sa valeur pour chacune des huit combinaisons C_i. Considérons, par exemple, la fonction F dont la table de vérité est donnée dans la table 11 :

C_i	x	y	z	F	$P_1 + P_3 + P_4$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
2	0	1	0	0	0
3	0	1	1	1	1
4	1	0	0	1	1
5	1	0	1	0	0
6	1	1	0	0	0
7	1	1	1	0	0

Table 11

Cette fonction F prend la valeur 1 pour la combinaison C_1 comme le produit P_1, la combinaison C_3 comme P_3 et la combinaison C_4 comme P_4. La fonction F prenant la valeur 0 pour toutes les autres combinaisons comme les produits P_1, P_3, P_4, nous pouvons donc écrire que F est égale à la fonction :

$$F = P_1 + P_3 + P_4$$

Nous pouvons vérifier cette identité dans la table 11. Nous pouvons donc exprimer F en fonction des variables x, y et z sous la forme :

$$F = \overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,y\,z + x\,\overline{y}\,\overline{z}$$

Cette façon, très générale, d'écrire une fonction booléenne est appelée <u>somme canonique de produits</u>.

II.10.b Produit canonique de sommes

Soient encore trois variables binaires x, y et z. Nous pouvons définir huit sommes logiques des trois variables faisant intervenir x ou $\overline{x}$, y ou $\overline{y}$ et z ou $\overline{z}$. La table 12 donne les tables de vérité de ces sommes. Nous constatons que chacune de ces fonctions ne prend la valeur 0 que pour une et une seule combinaison.

				S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
C_i	x	y	z	$x+y+z$	$x+y+\overline{z}$	$x+\overline{y}+z$	$x+\overline{y}+\overline{z}$	$\overline{x}+y+z$	$\overline{x}+y+\overline{z}$	$\overline{x}+\overline{y}+z$	$\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}$
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
3	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
4	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
5	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
6	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Table 12

Reprenons l'exemple précédent de la fonction F. Celle-ci vaut 0 pour les combinaisons C_0, C_2, C_5, C_6 et C_7 en même temps que S_0, S_2, S_5, S_6 et S_7. La fonction F peut donc être vue comme le produit logique de ces cinq sommes, ce qui est vérifié dans la table 13. Nous pouvons donc exprimer la fonction F sous la forme suivante :

$$F = (x + y + z) \bullet (x + \overline{y} + z) \bullet (\overline{x} + y + \overline{z}) \bullet (\overline{x} + \overline{y} + z) \bullet (\overline{x} + \overline{y} + \overline{z})$$

Cette écriture est appelée <u>produit canonique de sommes</u>. Celle-ci est moins utilisée que la somme canonique de produits.

C_i	x	y		F	$S_0 \bullet S_2 \bullet S_5 \bullet S_6 \bullet S_7$
0	0		0	0	0
1	0		1	1	1
2	0		0	0	0
3	0		1	1	1
4	1		0	1	1
5	1		1	0	0
6	1		0	0	0
7	1		1	0	0

Table 13

II.11 Simplification de l'écriture des fonctions logiques

II.11.a Simplification algébrique

Simplifier une expression booléenne c'est lui trouver une forme plus condensée, faisant intervenir moins d'opérateurs et conduisant à une réalisation matérielle plus compacte. On peut simplifier une fonction par manipulation algébrique en utilisant par exemple les relations rassemblées dans la table 9. Considérons la fonction F définie par la table de vérité suivante :

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Table 14

Nous en déduisons sa forme canonique somme de produits :

$$F = \overline{x}\,y\,z + x\,\overline{y}\,z + x\,y\,\overline{z} + x\,y\,z$$

Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} F &= \overline{x}\,y\,z + x\,\overline{y}\,z + x\,y\,\overline{z} + x\,y\,z \\ &= (\overline{x}\,y\,z + x\,y\,z) + (x\,\overline{y}\,z + x\,y\,z) + (x\,y\,\overline{z} + x\,y\,z) \\ &= y\,z\,(\overline{x} + x) + x\,z\,(\overline{y} + y) + x\,y\,(\overline{z} + z) \\ &= x\,y + y\,z + z\,x \end{aligned}$$

Cependant cette méthode, qui demande astuce et chance, n'est pas toujours très aisée à mettre en œuvre. Nous allons maintenant décrire une méthode graphique très utile pour un nombre de variables inférieur à 6.

II.11.b Tableaux de Karnaugh

La méthode de simplification de Karnaugh repose sur l'identité :

$$(A \bullet B) + (A \bullet \overline{B}) = A \bullet (B + \overline{B}) = A$$

Elle est basée sur l'inspection visuelle de tableaux disposés de façon telle que les cases adjacentes en ligne et en colonne ne diffèrent que par l'état d'une variable et une seule.

Si une fonction dépend de n variables il y a 2^n produits possibles. Chacun de ces produits est représenté par une case dans un tableau. Les figures suivantes donnent la structure des tableaux de Karnaugh pour 2, 3, 4 et 5 variables. Pour 5 variables, deux représentations sont possibles. Le tableau de Karnaugh peut être traités comme deux tableaux 4x4 superposés (fig. 15) ou un seul tableau de 4x8 (fig. 16). Observez comment sont numérotées les lignes et les colonnes : d'une case à sa voisine une seule variable change d'état.

y \ x	0	1
0		
1		

Tableau à 2 variables

Figure 13

z \ xy	00	01	11	10
0				
1				

Tableau à 3 variables

Figure 14

zt \ xy	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Tableau à 4 variables

Figure 15

u = 0

zt \ xy	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

u = 1

zt \ xy	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Tableau à 5 variables

Figure 16

tu \ xyz	000	001	011	010	110	111	101	100
00								
01								
11								
10								

Tableau à 5 variables

Figure 17

Chaque case d'un tableau correspond au seul minterm prenant la valeur 1 pour la combinaison identifiée par la ligne et la colonne. Par exemple les trois cases coloriées dans les tableaux de la figure 18 correspondent respectivement aux produits suivants :

$$x\,y\,z\,t,\quad \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t}\quad \text{et}\quad x\,y\,\bar{z}\,\bar{t}$$

Il faut comprendre chaque ligne et chaque colonne comme une structure cyclique continue : chaque case a toujours quatre voisins qu'il faut éventuellement chercher à l'autre extrémité de la ligne ou de la colonne. Les tableaux de la figure 18 illustrent ce concept, les croix y matérialisent les voisins des cases coloriées :

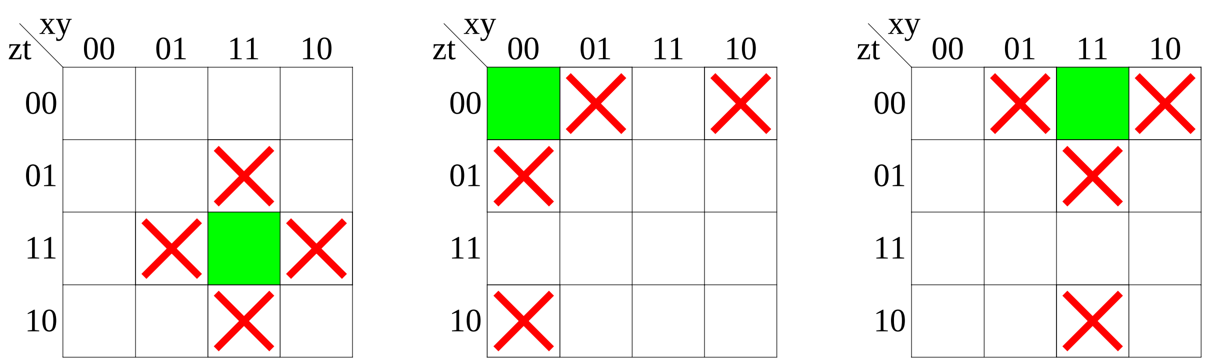

Figure 18

Dans le cas de la représentation en deux tableaux superposés chaque case a cinq voisins : les quatre dans le même plan et une dans l'autre plan.

Le passage de la table de vérité au tableau de Karnaugh consiste à remplir chaque case avec la valeur de la fonction pour le produit correspondant. Il est possible de n'indiquer que les 1.

La méthode de simplification de Karnaugh consiste à rassembler les cases adjacentes contenant des 1 par groupes de 2, 4 ou 8 termes. Considérons en effet le groupement vertical de deux cases, en rouge, de la figure 19. Il correspond à la somme de deux termes :

$$G = x\,y\,t + x\,y\,\bar{t}$$

Il est possible de factoriser le produit x y :

$$G = x\,y\,(t + \bar{t}) = x\,y$$

La variable t qui prend les deux valeurs 0 et 1 dans le groupement disparaît. Il ne reste que le produit des variables x et y, qui gardent ici la valeur 1.

Dans un groupement de deux termes on élimine donc la variable qui change d'état et on conserve le produit des variables qui ne changent pas. Dans un groupement de quatre on élimine les deux variables qui changent d'état. Dans un groupement de huit on élimine trois variables, etc…

On cherche à avoir le minimum de groupements, chaque groupement rassemblant le maximum de termes. Une même case peut intervenir dans plusieurs groupements car C + C = C. C'est le cas de la case jaune sur la figure 19.

Pour les cases isolées on ne peut éliminer aucune variable. On conserve donc le produit caractérisant la case. L'expression logique finale est la réunion des groupements après élimination des variables qui changent d'état.

Reprenons l'exemple de la fonction F définie par la table de vérité 14. La figure 19 donne le tableau de Karnaugh correspondant :

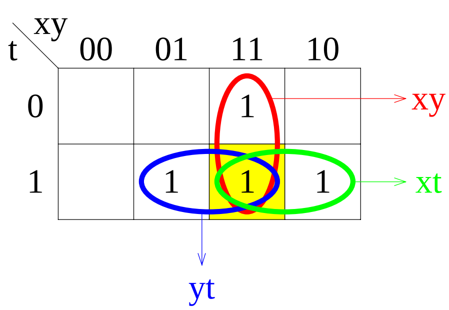

Figure 19

Nous y observons trois groupements de deux termes, nous pouvons écrire pour la fonction :

$$F = x\,y + y\,z + z\,x$$

Nous retrouvons le résultat précédent.

Considérons une autre fonction F de quatre variables x, y, z et t définie par la table 15. La figure 20 donne le tableau de Karnaugh équivalent. Sur cette figure nous avons également matérialisé les trois groupements possibles : deux groupements de quatre termes, dont un contenant les quatre coins, et un groupement de deux termes. Cette méthode nous permettent d'écrire :

$$F = x\,\bar{y} + \bar{y}\,\bar{t} + y\,\bar{z}\,t$$

x	y	z	t	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Table 15

zt \ xy	00	01	11	10
00	1			1
01		1	1	1
11				1
10	1			1

Figure 20